Traitement du Signal

James L. Crowley

Deuxième Année ENSIMAG Troisième Bimestre 1999/00

Séance 11 : 3 avril 2000

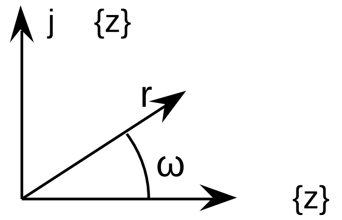
Filtres à Réponse Impulsionelle Infinie

Formule du Jour

$$\boxed{y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, x(k-m) \;-\; \sum_{n=1}^{N-1} a_n\, y(k-n)}$$

Rappelle : Représentation polaire d'un variable complexe et le plan Z :

$$z = \{z\} + j\ \{z\} = r\, e^{j\omega}$$



La transfomée en Z est une fonction complexe définie sur la plan complexe.

Définition de la Transformée en Z

La transformé en z peut être considéré comme une généralisation de la transformation de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier.

La transformée en z constitue l'outil privilégie pour l'étude des systèmes discrets. Elle joue un rôle équivalent à celui de la transformée de Laplace.

Par exemple, la transformée en z permet de représenter un signal possédant un infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombre.

Défnition : Soit un signal discrèt x(n).

La transformée en Z (bilatérale) est définie par

$$\boxed{X(z) = Z\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ z^{-n}}$$

ou z est une variable complexe et où X(z) est un fonction complexe de la variable z.

Lien avec la transformé de Fourier

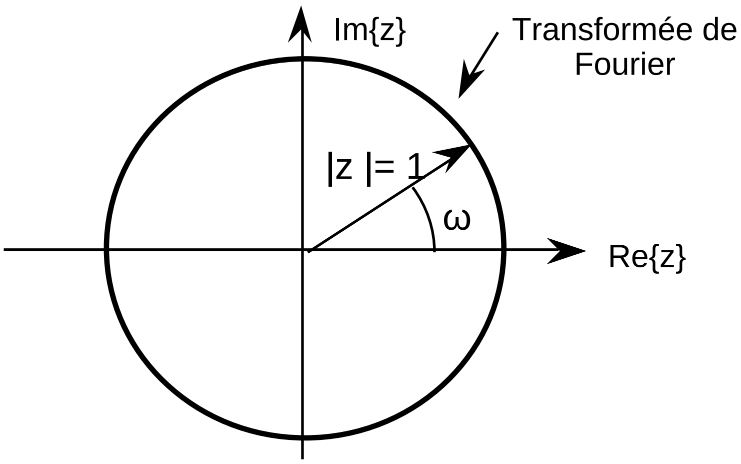
Soit $z = r\, e^{j\omega}$

$$\text{Donc } X(z) = X(r\, e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\,(r e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, r^{-n}\, e^{-j\omega n}$$

$$\text{Pour } |r| = 1,\ X(z) = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, e^{-j\omega n}$$

Donc, la transformé de Fourier est un transformé de z pour lesquelle |z| = 1.

On peut trouver la transformée de Fourier sur l'anneau |z| = 1



Filtres à Réponse Impulsionelle Infinie (RII ou “IIR”) :

Une opération de filtrage définie par une opération linéaire “récursive”.
Ces filtres sont aussi connu par nom filtres récursif.
Forme générale des filtres recursifs

Exemple d'un filtre récursif du premier ordre

Considêr un compte d'epargne avec versemement annuel d'intêret .

Soit : n : année

x(n) : virement au compte (soit x(n) = 0 n < 0)

y(n) : solde du compte

α : facteur annuel (α = 1 + taux)

Simulation :

Soit x(0) = δ(n)

y(0) = x(0)

y(1) = x(1) + α y(0)

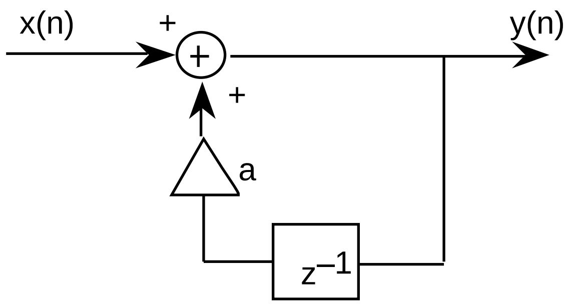
y(2) = x(2) + α y(1)

y(n) = x(n) + α y(n-1)

Il s'agit d'un filtre recursif du premier ordre,
définie par la relation de récurrence suivante :

$$y(n) = x(n) + a\ y(n-1)$$

où a est une constante réelle. Un tel filtre est réalisé par une structure du forme :



où z^{-1} est un rétard de ΔT.

Fonction de Transfert :

La ratio de la sortie sur l'entrée : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

On peut écrire :

$$Y(z) = X(z) + Y(z)\, a\, z^{-1} \;\Rightarrow\; Y(z)\,(1 - a\, z^{-1}) = X(z)$$

et donc :

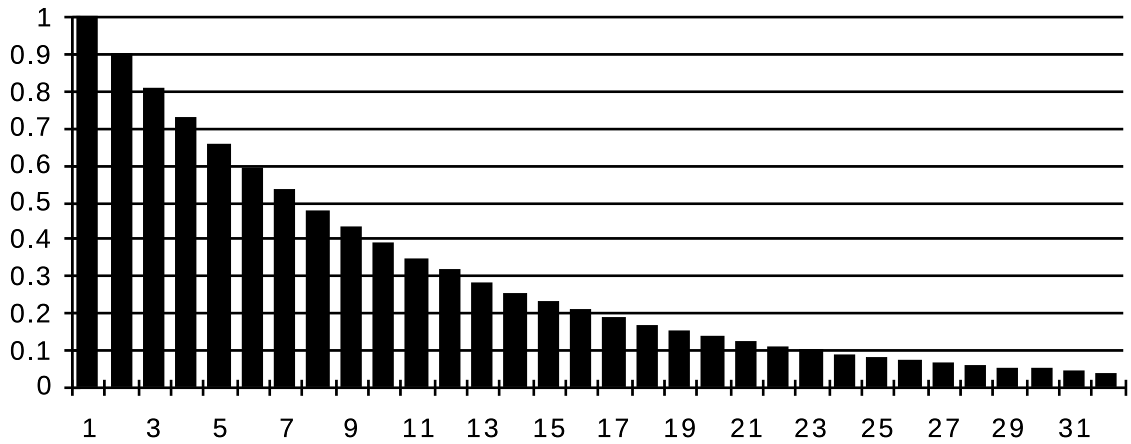
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}}$$

Note que cette ratio a une pôle (valeur infinie) à : $1 - a\, z^{-1} = 0$

ou bien quand $a\, z^{-1} = 1$ ou $z^{-1} = \frac{1}{a}$ ou $z = a$

La réponse impulsionnelle est donnée par $h(n) = a^n$

Exemple : a = 0.9

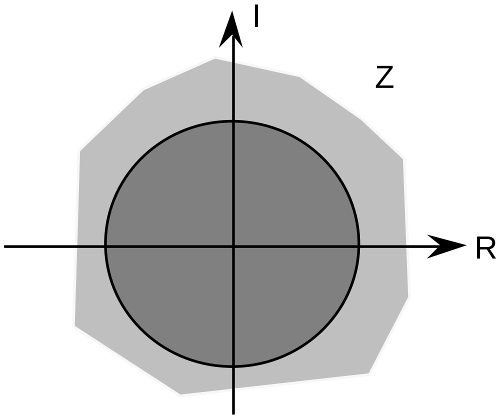


Stabilité d'un filtre de premier ordre :

La stabilité d'un filtre est définit par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} | h(n) | < \infty$$

La filtre recursif de premier ordre a : $h(n) = a^n$
Elle est stable quand $| a |< 1.0$.



Le condition de stabilité est que les racines du denominator (les pôles) se trouve à l'intérieur du cercle : $| z | = 1.0$.

(un compte banquaire est stable si sa solde reste bornée :-))

Représentations fréquentielles des filtres du premier ordre

La réponse en fréquence s’obtient pour le cercle du plan z : $z = e^{j\omega t}$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a\, e^{-j\omega}} = \frac{1}{(1-a\text{Cos}(\omega))-ja\text{Sin}(\omega)} \quad \frac{(1-a\text{Cos}(\omega))+ja\text{Sin}(\omega)}{(1-a\text{Cos}(\omega))+ja\text{Sin}(\omega)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - a\cos(\omega) - j\, a \sin(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$$

$$\text{Re}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{1 - a\cos(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2} \quad \text{Im}\{H(e^{j\omega})\} = \frac{-a\sin(\omega)}{1 - 2a\cos(\omega) + a^2}$$

Filtres du deuxième ordre

Un filtre recursif du second ordre est définie par la relation de récurrence suivante :

$$y(k) = b_0\, x(k) + b_1\, x(k-1) + b_2\, x(k-2) - a_1\, y(k-1) - a_2\, y(k-2)$$

ou b_m et a_n sont les réels.

La fonction de transfert associée est

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Cette fonction comporte deux pôles et deux zéros.
Les zeros sont les racines de $b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$ est donne les valeurs de z pour lequelle $H(z) = 0$.

Les pôles sont les racines de $1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$, et donne les valeurs de z pour lequelle $H(z) = \infty$.

Les pôles et les zéros peut être réels ou complexes conjugées.
Le cas où les deux pôles sont réels
se ramène à deux cellules du premier ordre en cascade.

Forme générale des filtres recursifs

Pour une filtre RII, la réponse impulsionelle est de durée infinie.

Le filtre est spécifié par deux jeux de coefficients a_k, $1 \leq k < N$ et b_k, $0 \leq k < M$:

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} b_m\, x(k-m) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n\, y(k-n)$$

en générale $M \leq N$ et il est dit que le filtre est d'ordre N.
Si $M > N$ on considere le filtre d'etre une cascade d'un filtre d'ordre N et un filtre d'ordre (N-M).

L'intérêt des filtres récursifs est leur faible coût en calcul.
Les l'inconvénients des filtres récursifs sont

1) leur non-linéairité en phase, et
2) leur instabilité numérique.

Les filtre RII peut être conçu par des méthodes semblables à ceux utilisé pour les filtres analogiques.

Linéairité implique $H(z) = H(z^{-1})$
On peut l'obtenir par une renversement du temps et une deuxième passage du filtre.

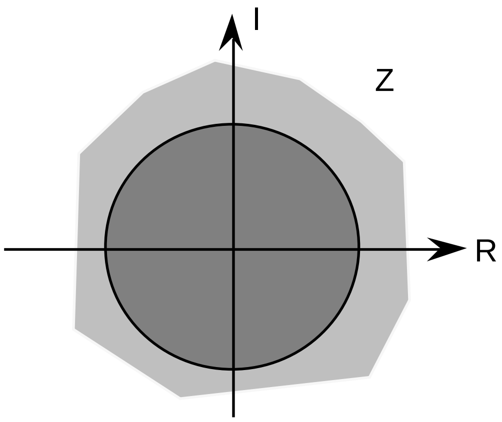
Stabilité

La fonction de transfert d'un filtre RII est $$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M-1} b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n z^{-n}}$$

Le condition de stabilité est que les N pôles (racines de $1 + \sum_{n=1}^{N-1} a_n z^{-n}$)

se trouve à l'intérieur du cercle :

$| z | = 1.0.$



Exemple :

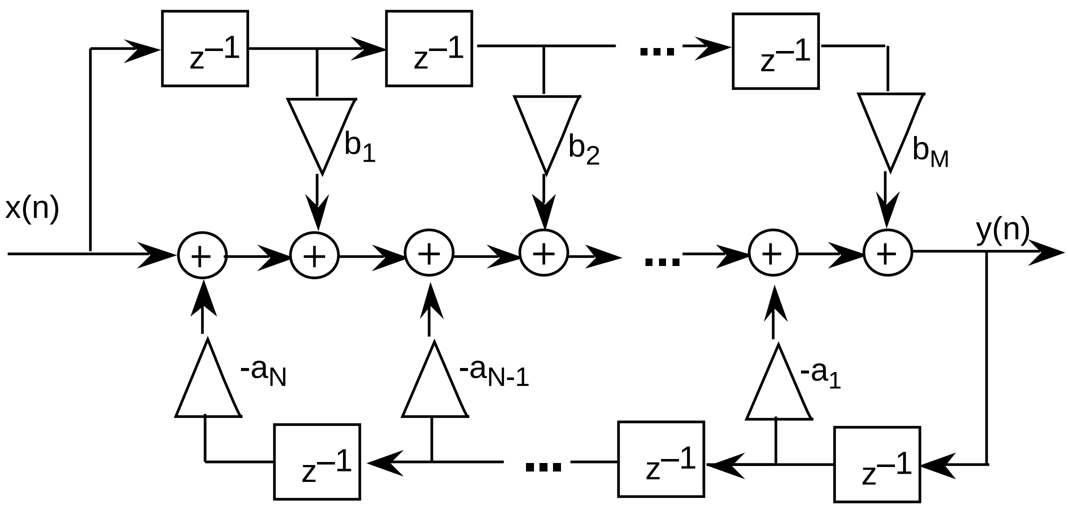
$$G(z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+0.5z^{-1})\ (1-0.4\ z^{-1})}$$ a des pôles à z = -0.5, 0.4. il est stable.

Structure des filtres RII

On appelle "structure d'un filtre" la manière dont on va implanter sa fonction de transfert. Il y a autant de structures que de façons d'écrire un fonction de transfert.

Exemple : $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}$

Un structure directe est de la forme suivante :

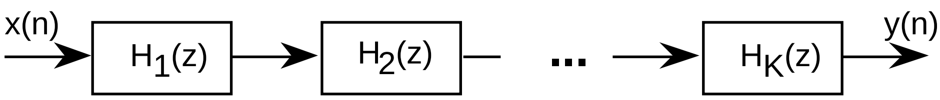


Decomposition en Série :

Une autre structure est obtenu par la forme :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \prod_{i=1}^{K} H_i(z)$$

Ce qui donne une structure en cascade :



Dans la plipart de cas, fonctions de transfert partielles sont soir du premier ordre, soit du deuxième ordre :

Donc :

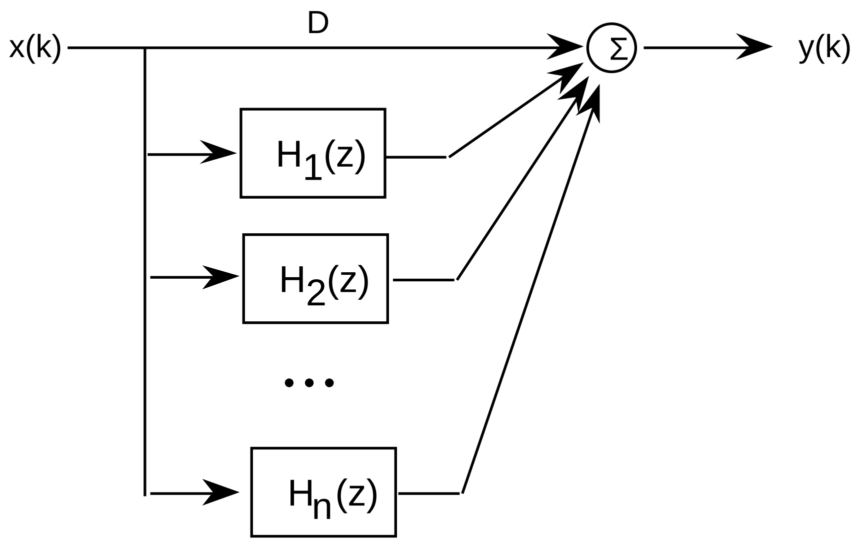
$$H_i(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1}}{1 + a_{i1}\, z^{-1}} \quad \text{ou bien} \quad H_i(z) = \frac{1 + b_{i1}z^{-1} + b_{i2}z^{-2}}{1 + a_{i1}\, z^{-1} + a_{i2}\, z^{-2}}$$

Le filtre de premier order aura ses pôles et zéros sur l'axe reél du plan z.

Un filtre de deuxieme ordre permet d'avoir les pôles et les zéros complexe pour la fonction de transfert globale, tout en restant avec les coefficient réel.

Décomposition en Parallel :

$$H(z) = D + \sum_{i=1}^{N} Hi(z)$$

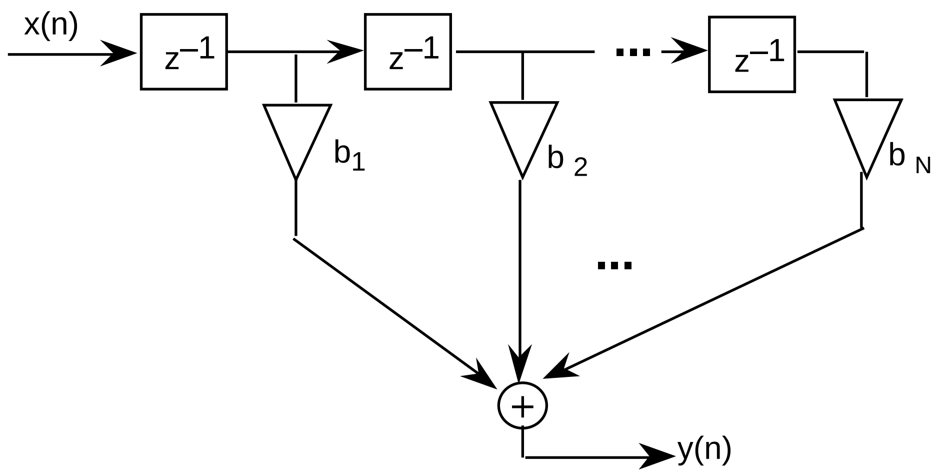


Filtre tout-zéros :

Considèrer la cas ou $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

Ca donne une fonction de transfert de :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1}$$



C'est une convolution avec une filtre R.I.F.

$$y(k) = \sum_{m=0}^{M-1} x(k-m)\, h(m) \quad \text{où} \quad h(m) = b_m$$

Méthodes de Synthèse

Il existe deux méthodes de synthèse des filtres à réponse impulsionnelle de durée infinie :

1) Les techniques de transposition des méthodes de synthèse de filtres analogique, et
2) Des méthodes algorithmiques qui font appel à des procédures d'optimisation.

Les filtre RII sont conçu par transposition numérique de la fonction de transfert de filtres continus. Les performance obtenues ne sont pas complètement conservées par ces transposition, mais elles sont suffisantes dans le plupart des cas pratique.

Méthode de l'Invariante Impulsionnel

On considère que la réponse impulsionnelle du filtre numérique doit correspondre à l'échantillonage de la réponse impulsionnelle d'un filtre continu :

$$h(t) \rightarrow h(n\Delta T)$$

Cette méthode n'est applicable que si l'on sait définir une fréquence d'échantillonage $\frac{1}{\Delta T}$. Il faut que la réponse en fréquence du filtre continu soit nulle (ou presque) au dela d'une certaine fréquence de valeur finie. Cette méthode ne peut donc s'applique aux filtre de types passe haut.

1) On écrit le filtre continu $H_c(p)$ sous la forme d'un développement en éléments simples :

$$H_c(p) = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{p - p_i}$$

2) on en déduit :

$$h(n\Delta T) = h(t) = \sum_{i=1}^{N} r_i \, e^{p_i n\Delta T}$$

3) ce qui donne

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{1 - e^{p_i n \Delta T} z^{-1}}$$

les pôles du filtre p_i sot tranformés en pôles $e^{p_i \Delta T}$ du filtre numérique.

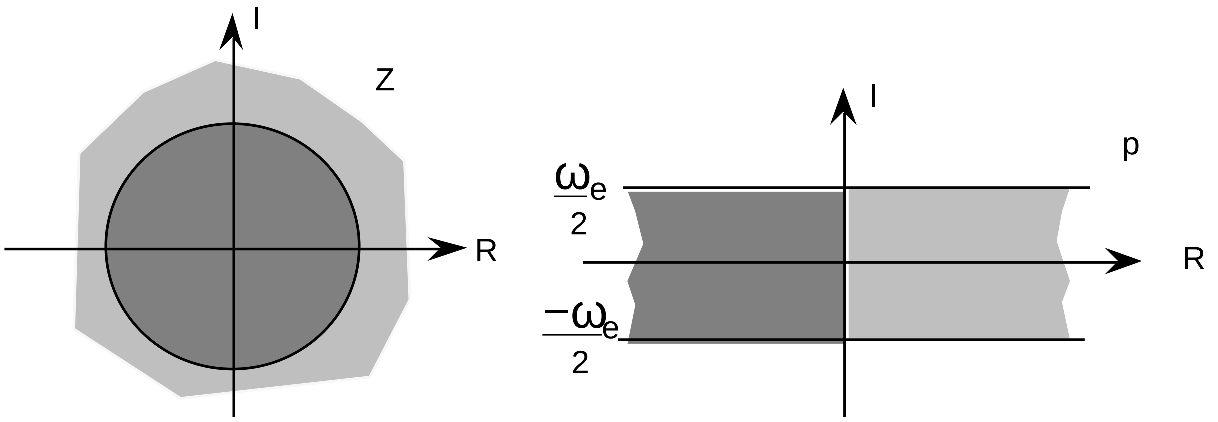
Cette méthode n'offre de véritable intérêt que dans des cas particuliers de contrates sur les réponses temporelles associées à une entrée paticuliers.

Transformation Bilinéaire :

L'utilisation de la transformation bilinéaire consiste à remplacer p dans la fonction de transfert en p du filtre continu par

$$p \rightarrow \frac{2}{\Delta T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La transformée binéaire permet d'obtenir un filtre numérique qui possède approximativement la même réponse temporelle qu'un filtre analogique quelle que soit l'excitation utilisée.



On remarque qu'au plan Z tout entier ne correspond q'une bande (de fréquence) du plan de p. Ceci provient de la périodicité introduite par l'échantillonage.

Dérivation du transformation $p \rightarrow \frac{2}{\Delta T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$

En domaine Laplace, l'opérateur élémentaire $\frac{1}{p}$ représentant une intégration.

tout filtre dynamique possède une fonction de transfert (fraction rationnelle) qui peut s'exprimer à l'aide de l'opérateur p^{-1}. Si l'on obtient une correspondance entre z et p^{-1}, il suffira alores de remplacer p^{-1} par son équivalent en z pour obtenir H(z).

La réponse impulsionnelle du filtre intégrateur $\frac{1}{p}$ est $h(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Pour une entrée quelconque x(t), la sortie s'exprime par

$$y(t) = \int_0^t x(u)\ h(t-u)\ du$$

pour deux instants t_i et t_{i+1} tels que $0 < u < t_i < t_{i+1}$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} x(u)\ du$$

L'intégrale peut être approchée de différentes manières, dont le méthode de trapèzes :

Puur $t_{i+1} - t_i = \Delta T$ suffisamment petit, la méthode de trapèzes donne :

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \frac{\Delta T}{2} \left[x(t_{i+1}) + x(t_i) \right]$$

soit avec $t_i = (n-1)\Delta T$ et $t_{i+1} = n\Delta T$

$$y(n) - y(n-1) = \frac{\Delta T}{2} \left[x(n) + x(n-1) \right]$$

La transformée en z de cette équation donne la fonction de transfert :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\Delta T}{2} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

L'équivalence entre ces des deux fonctions de transfert définit une équivalence entre p et z par :

$$z \approx \frac{2}{\Delta T} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$